

1. Determinați o primitivă a funcției $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$.

Soluție. Pentru $x \in (0, 1)$ avem $\int \arcsin \sqrt{1 - x^2} dx = x \arcsin \sqrt{1 - x^2} - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} dx = x \arcsin \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x^2} + C$ **4p**

Analog, primitivele pe $(-1, 0)$ sunt $x \arcsin \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x^2} + C$ **2p**

În final, folosind și faptul că o funcție derivabilă este și continuă deducem că o primitivă pe $[-1, 1]$ este $F(x) = \begin{cases} x \arcsin \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x^2} - 1, & x \in [-1, 0) \\ x \arcsin \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x^2} + 1, & x \in [0, 1] \end{cases}$; se verifică faptul că această funcție este derivabilă pe $[-1, 1]$. **3p**

2. Fie mulțimea $G = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și „ $\cdot$ ” o lege de compoziție pe G astfel încât $(G, \cdot)$ este grup cu elementul neutru $e = x_1$. Notăm cu A mulțimea elementelor a din G pentru care există o permutare σ din S_n astfel încât $a = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$. Să se arate că:

a) Dacă n este impar și grupul $(G, \cdot)$ este necomutativ, atunci A are cel puțin trei elemente.

b) Dacă există a din A , $a \neq e$, element care comută doar cu e și a , atunci A are cel puțin $\frac{n}{2}$ elemente.

Soluție. G e grup finit cu un număr impar de elemente, deci nu există elemente de ordin 2 în grup. Atunci $x \neq x^{-1}$ dacă $x \neq e$. Așezând convenabil elementele grupului (fiecare x din G lângă simetricul său), găsim o permutare σ astfel încât $e = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$, deci e se află în mulțimea A . **1p**

Să presupunem, prin absurd, că $A = \{e\}$. Fie x, y din G fixate, $x \neq y$ și fie z rezultatul compunerii celorlalte $n - 2$ elemente ale grupului. Atunci xyz și yxz se află în A , deci $xyz = yxz = e$, de unde $xy = yx$, pentru orice x, y din G , deci G ar fi comutativ, fals. **2p**

Așadar A conține încă un element $a = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$. Dar $a \neq a^{-1}$, iar $a^{-1} = x_{\sigma(n)}^{-1} \dots x_{\sigma(1)}^{-1} \in A$, deci A are cel puțin trei elemente. **1p**

b) Cum $aa^{-1} = a^{-1}a$, reiese $a^{-1} = a$. **1p**

În particular, deoarece G are un element de ordin 2, reiese că n este par.

Fie $b \in G$, $b \neq a$. Se știe că funcția $f : G \rightarrow G$, $f(x) = bxb^{-1}$ este automorfism al grupului $(G, \cdot)$. Să presupunem că $a = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$. Atunci $f(a) = f(x_{\sigma(1)}) \dots f(x_{\sigma(n)})$ iar f este bijectivă, deci $f(a) \in A$. Pe de altă parte, $f(a) = bab^{-1}$, deci $bab^{-1} \in A$, oricare ar fi $b \in G$. **2p**

Dacă avem $b, c \in G$ astfel încât $bab^{-1} = cac^{-1}$, atunci $ab^{-1}c = b^{-1}ca$, deci $b^{-1}c = a$ sau $b^{-1}c = e$, de unde $b = ac$. De aici reiese că A conține elementele bab^{-1} , adică cel puțin $\frac{n}{2}$ elemente. **2p**